

# ДИАГНОСТИКА СЛУЧАЙНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ ИОНОСФЕРЫ ПО ДАННЫМ ДЕКАМЕТРОВОГО РАДИОЗОНДИРОВАНИЯ С ВЫСОКООРБИТАЛЬНЫХ ИСЗ

Афанасьев Н.Т. (1), Лукьянцев Д.С. (1), Танаев А.Б. (1), Чудаев С.О. (1,2)  
[spacemaklay@gmail.com](mailto:spacemaklay@gmail.com)

(1) Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия  
(2) Институт солнечно-земной физики СО РАН, Иркутск, Россия

Для восстановления тонкой структуры ионосферы по данным многочастотного радиопросвечивания с борта высокоорбитального ИСЗ получена система интегральных соотношений для вторых статистических моментов групповой и фазовой задержек декаметровых радиосигналов. В соотношениях учтены сильные флуктуаций траекторий между пунктами приема и излучения. Для решения обратной задачи рассмотрена обобщенная модель тонкой структуры ионосферы в виде корреляционного эллипсоида неоднородностей с эффективными параметрами. Модель согласована с изменениями средней ионосферы, заданной составным гауссово-экспоненциальным высотным профилем электронной концентрации. Система интегральных соотношений решена относительно неизвестных параметров корреляционного эллипсоида для различных рабочих частот зондирования. Пространственная динамика параметров тонкой структуры ионосферы определяется с помощью данных измерений, полученных на сети приемников, расположенных на земной поверхности.

Как известно, флуктуации характеристик спутниковых радиосигналов, прошедших через ионосферу, содержат информацию о случайных неоднородностях электронной плотности [Гершман и др., 1984]. Особенно чувствительными к воздействию неоднородностей являются сигналы на рабочих частотах вблизи порога радиопрозрачности ионосферы [Данилкин, 1985]. Для организации надежного ионосферного канала передачи информации необходима диагностика случайной изменчивости среды. Перспективным в этом направлении представляется метод зондирования ионосферы, основанный на многочастотном просвечивании сигналами декаметрового диапазона с борта геостационарного или высокоапогейного искусственного спутника Земли (ИСЗ) [Гивишвили, 1994; Гивишвили, 2016; Гивишвили и др., 2016;]. Развитие теоретических вопросов метода декаметрового зондирования ионосферы с высокоорбитальных ИСЗ для повышения его информативности и оперативности представляется важным.

Расчет статистических характеристик сигналов при транзионосферном зондировании ионосферы возможен с помощью имитационного моделирования, основанного на методе Монте-Карло. Однако использование метода статистических испытаний требует решения краевой задачи электродинамики в диапазоне рабочих частот для каждой реализации случайной функции диэлектрической проницаемости. Последнее требует больших вычислительных ресурсов для проведения расчетов. Более того, метод Монте - Карло не позволяет установить функциональные связи между статистическими

характеристиками сигнала и параметрами ионосферных неоднородностей, что затрудняет решение обратной задачи. Оптимальным вариантом решения обратной задачи трансionoсферного зондирования является применение математического аппарата аналитических методов теории случайных полей [Гершман и др.,1984]. Для расчета статистических моментов сигналов зондирования в работе использовано лучевое приближение и аппарат теории возмущений [Kravtsov, Orlov,1990].

### Аналитические соотношения

Для решения обратной задачи зондирования случайно-неоднородной ионосферы необходимы функциональные соотношения, связывающие статистические моменты характеристик сигналов просвечивания и параметры тонкой структуры среды. В качестве исходных рассмотрим геометрооптические выражения для групповых и фазовых задержек сигналов многочастотного просвечивания ионосферы, принятых в пункте наблюдения [Kravtsov, Orlov,1990]:

$$\tau(f) = \frac{1}{c} \int^S \frac{dS(f)}{\sqrt{\varepsilon(R, \varphi, \theta, f)}} \quad (1)$$

$$\phi(f) = \frac{2\pi f}{c} \int^S \sqrt{\varepsilon(R, \varphi, \theta, f)} dS(f) \quad (2)$$

где интегрирование проводится по траекториям, соединяющим пункты приема и излучения,  $\varepsilon(R, \varphi, \theta, f)$  - случайная функция диэлектрической проницаемости изотропной ионосферы,  $R, \varphi, \theta$  текущие сферические координаты луча,

$dS(f) = dR \sqrt{1 + \left(\frac{R(f)d\varphi}{dR}\right)^2 + \left(\frac{R(f)d\theta}{dR}\right)^2}$  - элемент дуги траектории,  $f$  - рабочая частота,  $c$  - скорость света.

Траекторию луча для каждой рабочей частоты  $f$  будем определять, решая краевую задачу для системы стохастических дифференциальных уравнений с независимой переменной элемента угловой дальности  $d\varphi$  [Kravtsov, Orlov,1990] :

$$\frac{dR}{d\varphi} = R \cot \beta, \quad \frac{d\alpha}{d\varphi} = (1 + \cos^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta) \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} - \tan \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right) \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \tan \alpha, \quad \frac{d\beta}{d\varphi} = (1 + \sin^2 \beta \tan^2 \alpha) \left( \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \cot \beta - R \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right) - 1 \right),$$

где  $\alpha, \beta$  - углы рефракции луча.

Флуктуации групповой и фазовой задержек сигнала просвечивания найдем в первом приближении метода возмущений [Гершман и др.,1984]. Для функции  $\varepsilon(R, \varphi, \theta, f)$ ,

входящей в уравнения (1)-(3) используем разложения:  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_0(R, \varphi, \theta, f)$  - средняя составляющая диэлектрической проницаемости, случайная функция  $\varepsilon_1(R, \varphi, \theta, f)$  характеризует тонкую структуру ионосферы. Будем полагать, что  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \varphi} \ll \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \theta} \ll \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \theta}$ . Траекторные характеристики сигнала определим в виде разложений:  $R = R_0 + R_1$ ,  $\theta = \theta_0 + \theta_1$ ,  $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ ,  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ ,  $\beta = \beta_0 + \beta_1$ . В дальнейшем будем полагать, что средняя траектория луча  $R = R_0(\varphi, f)$  лежит в плоскости дуги большого круга, когда  $\alpha_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ . (Рис.1).

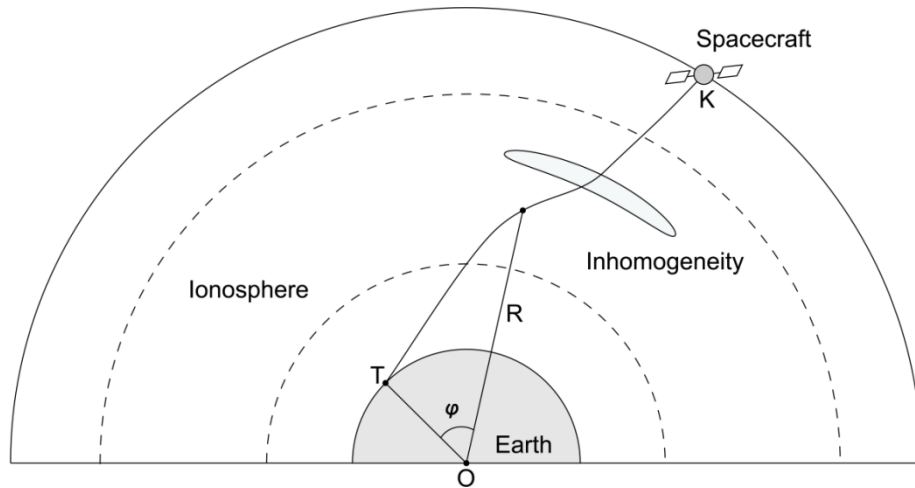


Рис.1. Схема радиопросвечивания ионосферы.

Подставляя эти разложения в (1)-(3), проводя линеаризацию и учитывая краевые условия в пунктах излучения и приема, получаем интегралы для средних и флуктуационных составляющих групповых и фазовых задержек сигналов на различных рабочих частотах:

$$\tau_0(f) = \frac{1}{c} \int_0^{\varphi_k} \frac{R_0 d\varphi}{\sqrt{\varepsilon_0} \sin \beta_0} \quad (4)$$

$$\phi(f) = \frac{2\pi f}{c} \int_0^{\varphi_k} \sqrt{\varepsilon_0} \frac{R_0 d\varphi}{\sin \beta_0} \quad (5)$$

$$\Delta\tau(f) = \frac{1}{c} \int_0^{\varphi_k} \left( \frac{2 \sin \beta_0}{\sqrt{\varepsilon_0}} R_1(\varphi) \left( 1 + \frac{d\beta_0}{d\varphi} \right) - \frac{R_0}{2 \sin \beta_0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \right) d\varphi, \quad (6)$$

$$\Delta\phi(f) = \frac{\pi f}{c} \int_0^{\varphi_k} \frac{\varepsilon_1 R_0}{\sqrt{\varepsilon_0} \sin \beta_0} d\varphi \quad (7)$$

где интегрирование проводится по средней траектории  $R_0(\varphi, f)$ . Отметим, что в формуле (7) при расчетах флуктуаций фазы в первом приближении метода возмущений отсутствуют флуктуации траектории. Между тем при вычислении флуктуации групповой

задержки в формулу (6) входит текущая флуктуация траектории  $R_1(\varphi, f)$ , которая является решением стохастической краевой задачи и удовлетворяет граничным условиям:

$$R_1(0, A, f) = R_1(\varphi_k, R_k, f) = 0 \quad (8)$$

где  $\varphi_k, R_k$  - координаты ИСЗ,  $A$  - радиус Земли. На высоких частотах эта флуктуация не существенна и формула (6) переходит в известное решение [Гершман и др., 1984]:

$$\Delta\tau(f) = -\frac{1}{c} \int_0^{\varphi_k} \frac{R_0}{2 \sin \beta_0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0}} d\varphi \quad (9)$$

Для радиоволн декаметрового диапазона флуктуации траектории могут быть значительными и их необходимо принимать во внимание. Решая систему уравнений (3) методом возмущений, для текущей флуктуации траектории  $R_1(\varphi, f)$  с учетом граничных условий (8) имеем:

$$R_1(\varphi, f) = -\frac{1}{Y_1(\varphi_k)} \left[ Y_1(\varphi) \int_{\varphi}^{\varphi_k} D_1 Y_2 \frac{R_k}{R_0} d\varphi + Y_2(\varphi) \int_0^{\varphi} D_1 Y_1 \frac{R_k}{R_0} d\varphi \right], \quad (10)$$

где:  $Y_1 = \frac{\partial R_0}{\partial \beta_H}(\varphi, f)$ ,  $Y_2 = \frac{\partial R_0}{\partial \beta_H}(\varphi_k - \varphi, f)$  - фундаментальные решения краевой задачи

просвечивания для каждой рабочей частоты,  $D_1(f) = \frac{1}{2} \left[ \cot \beta_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) - R_0 \frac{\partial}{\partial R_0} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) \right]$ ,

$\beta_H(f)$  - начальный угол падения радиоволны из источника на ионосферу.

Подставляя (10) в (6) и проводя аналитические преобразования, для флуктуации групповой задержки сигнала получаем:

$$\Delta\tau(f) = \frac{1}{c} \int_0^{\varphi_k} \left[ D_1(\varphi) F(\varphi) - \frac{R_0 \varepsilon_1}{2 \sin \beta_0 \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \right] d\varphi \quad (11)$$

$$\text{где: } F(\varphi) = -\frac{R_k}{Y_1(\varphi_k) R_0(\varphi)} \left[ Y_2(\varphi) \int_0^{\varphi} \Gamma_1(\varphi') d\varphi' + Y_1(\varphi) \int_{\varphi}^{\varphi_k} \Gamma_2(\varphi') d\varphi' \right]$$

$$\Gamma_1 = Y_1 F_1, \quad \Gamma_2 = Y_2 F_1, \quad F_1 = \frac{2 \sin \beta_0}{c \sqrt{\varepsilon_0}} \left( 1 + \frac{d\beta_0}{d\varphi} \right)$$

Интегрирование в (11) проводится по средней траектории  $R_0(\varphi, f)$ , являющейся решением системы уравнений:

$$\frac{dR_0}{d\varphi} = R_0 \cot \beta_0, \quad \frac{d\beta_0}{d\varphi} = -\frac{R_0}{2\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial R_0} - 1 \quad (12)$$

На основе (7),(11) получим выражения для дисперсий фазовых и групповых задержек сигналов многочастотного радиопросвечивания ионосферы. Для построения моментов необходимо задать модель корреляционной функции или спектра ионосферных

неоднородностей. Хорошо известно [Гершман и др.,1984], что ионосфера является многомасштабной случайно-неоднородной средой и характеризуется степенным спектром неоднородностей. Между тем для решения ряда практических задач важно знать динамику интегрального состояния случайной изменчивости ионосферы. Поэтому для восстановления интегральных свойств тонкой структуры ионосферы будем использовать модель обобщенного корреляционного эллипсоида неоднородностей с эффективными параметрами [Гусев, Овчинникова, 1980; Алимов и др.,1997; Вологдин и др., 2007; Афанасьев и др., 2009; Afanasiev et al., 2010]. Функцию корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости ионосферы представим в виде [Гершман и др.,1984]:

$$N = \langle \varepsilon_1(R_1, \varphi_1, \theta_1) \varepsilon_1(R_2, \varphi_2, \theta_2) \rangle = N_1 N_0 \quad (13)$$

где  $N_0$  - гауссова однородная часть корреляционной функции с масштабом  $a$ . Функция  $N_1$  характеризует статистическую неоднородность случайного поля неоднородностей и самосогласована с пространственной изменчивостью средней ионосферы. Будем считать, что функция  $N_1$  изменяется более медленно, чем  $N_0$  и зададим ее в виде:

$$N_1 = \mu^2 \exp \left( - \left( \frac{x - x_L}{H_1} \right)^2 - \left( \frac{z - z_L}{H_2} \right)^2 \right) (1 - \varepsilon_0)^2$$

где  $\mu^2$  - интенсивность случайных неоднородностей электронной концентрации ионосферы,  $H_1, H_2, x_L, z_L$  - масштабы локализации и координаты области статистической изменчивости ионосферы. Проводя в формулах (7),(11) замену переменных:  $dx = Ad\varphi$ ,  $z_0 = R_0 - A$ . и возводя их в квадрат, после усреднения по всем реализациям случайной изменчивости ионосферы и аналитических преобразований, для дисперсий фазовой и групповой задержек сигналов на различных рабочих частотах получаем:

$$\sigma_\varphi^2(f) = \frac{\pi^2 f^2}{c^2} \int_0^{x_k} \frac{(1 + \frac{z_0}{A})^2 a \mu^2 E \sqrt{\pi} (1 - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0 \sin \beta_0} dx, \quad (14)$$

$$\sigma_{\Delta\tau}^2(f) = \frac{1}{2c^2} \int_0^{x_k} \left[ \Phi^2(x) \frac{\mu^2 E \sqrt{\pi} (1 - \varepsilon_0)^2}{a \varepsilon_0^2} \left(1 + \frac{z_k}{A}\right)^2 S(x) + \frac{a \mu^2 E \sqrt{\pi} (1 - \varepsilon_0)^2}{2\varepsilon_0^3 \sin \beta_0} \left(1 + \frac{z_0}{A}\right)^2 \right] dx \quad (15)$$

где:

$$\Phi(x) = - \frac{Y_2(x)}{Y_1(x_k)} \int_0^x Y_1(x') \frac{\sin \beta_0}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z_0} \left(1 + \frac{z_0}{A}\right) dx' - \frac{Y_1(x)}{Y_1(x_k)} \int_x^{x_k} Y_2(x') \frac{\sin \beta_0}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z_0} \left(1 + \frac{z_0}{A}\right) dx'$$

$$S(x) = \sin \beta_0 \left[ \cot^2 \beta_0 + \left(1 + \frac{z_0}{A}\right)^2 \right], \quad E = \exp \left( - \left( \frac{x - x_L}{H_1} \right)^2 - \left( \frac{z_0 - z_L}{H_2} \right)^2 \right)$$

В случае неравномерного распределения ионосферных неоднородностей для определения области их локализации по данным многочастотного просвечивания можно использовать сеть приемников, расположенных на поверхности Земли. Анализ результатов измерений можно проводить следующим образом. В ряде наземных приемных пунктов регистрируются частотные зависимости дисперсий фазовых и групповых задержек спутниковых сигналов, на которых в некоторых частотных диапазонах статистические моменты наиболее выражены. Далее в пространстве строится некоторая потенциальная область, где сосредоточены случайные неоднородности. Границы этой области образуются траекториями сигналов, рассчитанными в средней ионосфере. Наложение потенциальных областей, построенных для совокупности частотных зависимостей, отвечающих различным пунктам приема сигналов, позволяет определить место сосредоточения случайных неоднородностей. Определив масштабы и координаты области локализации неоднородностей можно перейти к восстановлению параметров корреляционного эллипсоида. Решая совместно уравнения (14),(15) относительно неизвестных параметров  $a$  и  $\mu^2$ , имеем:

$$\mu^2 = \sqrt{\frac{(J_1\sigma_{\Delta t}^2 - J_3\sigma_{\Phi}^2)\sigma_{\Phi}^2}{J_2J_1^2}}, \quad (16)$$

$$a = \frac{\sqrt{J_2\sigma_{\Phi}^2}}{\sqrt{J_1\sigma_{\Delta t}^2 - J_3\sigma_{\Phi}^2}}, \quad (17)$$

где:

$$J_1(f) = \int_0^{x_k} \frac{\pi^2 f^2 (1 + \frac{z_0}{A})^2 E \sqrt{\pi} (1 - \varepsilon_0)^2}{c^2 \varepsilon_0 \sin \beta_0} dx,$$

$$J_2(f) = \int_0^{x_k} \left[ \frac{\Phi^2(x) E \sqrt{\pi} (1 - \varepsilon_0)^2}{2c^2 \varepsilon_0^2} (1 + \frac{z_k}{A})^2 S(x) \right] dx, \quad (18)$$

$$J_3(f) = \int_0^{x_k} \left[ \frac{E \sqrt{\pi} (1 - \varepsilon_0)^2}{2c^2 \varepsilon_0^3 \sin \beta_0} (1 + \frac{z_0}{A})^2 \right] dx$$

Заметим, что в случае равномерного распределения ионосферных неоднородностей, на частотных зависимостях дисперсий фазовых и групповых задержек сигналов нет выраженных участков повышенных флуктуаций, поэтому в формулах (18) функция  $E \rightarrow 1$ . Как следует из (16),(17), для расчета  $a$  и  $\mu^2$  необходимо вычислить интегральные коэффициенты  $J_1, J_2, J_3$ . Непосредственный численный расчет этих коэффициентов достаточно сложен, поскольку для каждой рабочей частоты сигналов необходимо знать изменения всех подынтегральных функций, включая фундаментальные решения, вдоль средних лучевых траекторий с космического аппарата, приходящих в пункт наблюдения.

Используя схему оптимизации вычислений подобных интегралов, предложенную в [Afanasiev, Chudaev, 2020], можно получить систему дифференциальных уравнений для совместного расчета интегральных коэффициентов, фундаментальных решений и средних лучевых траекторий  $z_0(x, f)$ . Важно заметить, что при многочастотном просвечивании ионосферы расчет средних траекторий  $z_0(x, f)$  проводится методом пристрелки в пункт приема для каждой рабочей частоты. В то же время дифференциальные уравнения для коэффициентов  $J_1, J_2, J_3$  интегрируются с начальными условиями. Тем самым, решение исходных краевых стохастических задач при многочастотном просвечивании ионосферы значительно упрощается. Для расчетов характеристик сигналов в задаче просвечивания ионосферы с высокоорбитальных ИСЗ целесообразно использовать составной гауссово-экспоненциальный высотный профиль, обеспечивающий непрерывность и дифференцируемость функции диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_0(z_0) = 1 - \frac{f_{kp}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z_0 - z_m}{y_m}\right)^2\right), \quad \text{при } z_0 \leq z_v \quad (19)$$

$$\varepsilon_0(z_0) = 1 - \frac{f_{kpV}^2}{f^2} \exp\left(-\frac{z_0 - z_v}{y_v}\right), \quad \text{при } z_0 \geq z_v$$

где

$$f_{kpV}^2 = f_{kp}^2 \exp\left(-\frac{y_m^2}{4y_v^2}\right), \quad z_v = z_m + \frac{y_m^2}{2y_v}$$

$z_m, y_m, f_{kp}$  - высота максимума ионизации, полутолщина и критическая частота нижней ионосферы,  $y_v$  - характерный масштаб верхней ионосферы, параметр  $f_{kpV}$  - характеризует критическую частоту на уровне  $z_v$  - высоте перехода внутренней ионосферы во внешнюю. Параметры  $f_{kpV}, z_v$  определяются из условий равенства составных функций диэлектрической проницаемости и их высотных градиентов в точке  $z_v$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для диагностики случайной изменчивости ионосферы по данным декаметрового радиопросвечивания с борта высокоорбитального ИСЗ рассмотрена обобщенная модель корреляционного эллипсоида неоднородностей с эффективными параметрами, учитывающая возможную локализацию неоднородностей в ограниченной области пространства. Получены аналитические соотношения для дисперсий групповых и фазовых задержек сигналов просвечивания на различных рабочих частотах в сферическом случае. При выводе соотношений учтены сильные флуктуации траекторий между пунктами приема и излучения. Система интегральных соотношений решена относительно

неизвестных параметров корреляционного эллипсоида для различных рабочих частот зондирования. Пространственная динамика параметров тонкой структуры ионосферы определяется с помощью данных измерений, полученных на сети приемников, расположенных на земной поверхности. Выполнена алгоритмизация полученных формул для оперативного расчета параметров корреляционного эллипсоида неоднородностей. Для реализации методики диагностики использована составная дифференцируемая модель диэлектрической проницаемости средней ионосферы.

Работа поддержана Минобрнауки России (тема государственного задания FZZE-2020-0024, соглашение № 075-15-2021-675).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов В.А., Рахлин А.В., Выборнов Ф.И. Модель взаимодействия ДКМВ-ДМВ радиоволн с сильно неоднородной среднеширотной ионосферой // Изв. вузов Радиофизика. 1997. Т.40, № 11. С.1323-1341.
2. Афанасьев Н.Т., Ларюнин О.А., Марков В.П. Флуктуации фазы радиоволны при полном внутреннем отражении от случайно-неоднородной ионосферы // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т.52. №10. С. 779-784.
3. Вологдин А.Г., Власова О.К., Приходько Л.И. Флуктуации группового пути и времени группового запаздывания сигнала при наклонном отражении волн от плоскостлой среды // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 10. С. 1194-1198.
4. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984. 392 с.
5. Гивишвили Г.В. Многочастотное просвечивание ионосферы – новый метод глобальной диагностики ионосферы в реальном времени // Космические исследования. 1994. Т.32, №4-5. С. 142-149.
6. Гивишвили Г.В. Метод МРПИ - основа дистанционного мониторинга ионосферы полярной зоны РФ в оперативном режиме // Гелиогеофизические исследования. Специальный выпуск. 2016. Вып.14. С.69-81.
7. Гивишвили Г.В., Крашенинников И.В., Гарбацевич В.А. Многочастотное радиопросвечивание арктической ионосферы // Гелиогеофизические исследования. 2016. Вып.15. С.71-78.
8. Гусев В.Д., Овчинникова Н.П. Модельное определение объемных характеристик неоднородностей ионосферы // Геомагнетизм и аэрономия. 1980. Т.20, №4. С. 626-631.
9. Данилкин Н.П. Просвечивание ионосферы на границе диапазона ее радиопрозрачности // Радиотехника. 1985. № 9. С. 3-12.
10. Afanasiev N.T., Chudaev S.O. Diagnostics of the stochastic ionospheric channel in the decameter band of radio waves // Solar-Terrestrial Physics. 2020. V. 6. Iss. 4. P. 77–85. doi: [10.12737/stp-64202010](https://doi.org/10.12737/stp-64202010)
11. Afanasiev N.T., Afanasiev A.N., Larunin O.A., Markov V.P. Phase fluctuations of radio waves experiencing total reflection from a randomly inhomogeneous plasma layer // J. Atmos Solar-Terr. Phys. 2010. V. 72, Iss. 7-8. P. 583-587.
12. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. Geometrical Optics of Inhomogeneous Medium. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 312 p.